



EXAMENUL DE BACALAUREAT 2023

Proba E.c) Matematică M_mate-info, Simulare județeană

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Demonstrați că $10^{\lg 2} + \sqrt[3]{-64} + \left[\frac{123}{7}\right] = 15$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
- 5p 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Demonstrați că numărul $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(30)$ este pătrat perfect.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2x + 1 + 2\sqrt{2x + 1} = 15$.
- 5p 4. Câte numere naturale de forma $\overline{ab2c}$ au suma cifrelor egală cu 5?
- 5p 5. În triunghiul ABC , punctele M , N și P sunt mijloacele laturilor BC , AC , respectiv AB . Arătați că $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = \vec{0}$.
- 5p 6. În triunghiul ABC măsurile unghiurilor A și B sunt de 45° , respectiv 105° și $AB = 3\sqrt{3}$. Calculați lungimea laturii BC .

SUBIECTUL II

(30 puncte)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se calculeze $\text{rang } A$.
- 5p b) Să se arate că $A^n = 14^{n-1} A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p c) Să se arate că inversa matricei $I_3 - A$ este $I_3 - \frac{1}{13} A$.
2. Pe \mathbb{R} considerăm legea " \circ " definită prin $x \circ y = 5xy - 30x - 30y + 186$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Se știe că această lege este asociativă și comutativă.
- 5p a) Demonstrați că $x \circ y = 5(x - 6)(y - 6) + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;
- 5p b) Determinați un element $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x \circ a = a \circ x = a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- 5p c) Dacă d_1, d_2, \dots, d_n sunt divizorii întregi ai numărului 2022 calculați $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$.



SUBIECTUL III

(30 puncte)

1. Se consideră funcția $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.
- 5p a) Demonstrați că ecuația $f'(x) = 0$ are o singură soluție în intervalul $(1, \infty)$;
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f ;
- 5p c) Demonstrați că $f(\lg 99) + f(\lg 101) < f(\lg 97) + f(\lg 103)$.
2. Fie funcția $f_{p,q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{p,q}(x) = (\sin x)^p \cdot (\cos x)^q$, unde $p, q \in \mathbb{N}^*$.
- 5p a) Demonstrați că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x$ este o primitivă a funcției $f_{1,1}$;
- 5p b) Calculați $\int_0^{\pi/2} f_{3,1}(x) dx$;
- 5p c) Fie F o primitivă a funcției $f_{2022,2023}$. Demonstrați că există un număr real k astfel încât $F(x+2\pi) - F(x) = k$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.